CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A IX-A

1. a) Demonstrați că: $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x], \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Rezolvați ecuația: $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=5x-4$.

c) Dacă n şi k sunt numere naturale astfel încât $2^k \le n < 2^{k+1}$ demonstrați că:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=n .$$

2. Fie ΔABC şi $A'\in(BC)$. Dreapta AA' intersectează a doua oară cercul circumscris ΔABC în D.

a) Demonstrați că $AA'\cdot A'D=A'B\cdot A'C$;

b) Dacă centrul de greutate $G\in AA'$ demonstrați că: $9AG\cdot GD=AB^2+BC^2+CA^2$;

3. La finala concursului de matematică aplicată "Adolf Haimovici", profilul ştiințe s-au calificat 50 elevi din clasa [a] IX [a]. După corectarea lucrărilor, 19 dintre ei au obținut punctajul maxim. S-au procedat, obişnuit la o probă de baraj pentru a desemna câştigătorul. Dar, şi la această probă toți cei 19 elevi au obținut punctajul maxim. Împreună cu ei am convenit următoarea regulă pentru desemnarea câştigătorului:

Elevii se aşează în cerc şi sunt numerotați cu 1, 2, 3, ..., 19.

Apoi, începând cu cel de pe poziția 2, fiecare al doilea concurent este eliminat, până când rămâne câştigătorul.

a) Pe ce poziție se află câştigătorul ?

b) Dar dacă ar fi rămas doar 16 elevi care ar fi participat la desemnarea câştigătorului, care ar fi fost poziția acestuia ?

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ astfel încât

$$f(n+1)=f(n)+\frac{1}{n^2+3n+2},\ (\forall)n\in\mathbb{N} \text{ şi } f(2014)=\frac{2014}{2015}.$$

a) Să se demonstreze că $f(n+1)=f(n)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$.

b) Determinați funcția *f*.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

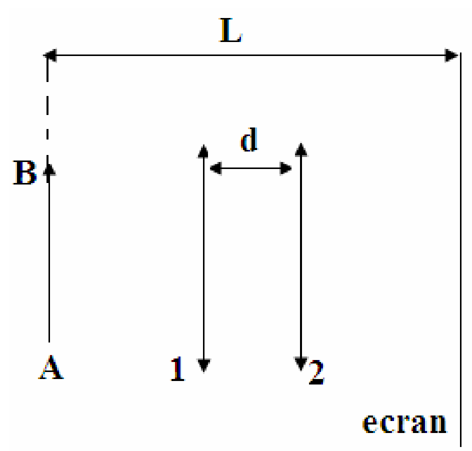
Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A X-A

1. Se consideră numărul real $x = \sqrt[5]{100}$.
a) Determinaţi partea întreagă a numărului x.
b) Stabiliţi care este numărul întreg cel mai apropiat de x.
c) Demonstraţi că există o infinitate de numere reale pozitive $a, a \neq 1$ pentru care $\log_a x$ este număr raţional.

2. Spunem că un număr complex z este <u>de tip I</u> dacă $\left|z^2+1\right| \le 1$ şi este <u>de tip II</u> dacă $\left|z+1\right| \le 1$.
a) Daţi un exemplu de număr complex de tip I care are modulul mai mare decât 1.
b) Demonstraţi că o infinitate de numere complexe de tip II au modulul mai mare decât 1.
c) Demonstraţi că, dacă un număr complex este atât de tip I cât şi de tip II, atunci modulul său este cel mult egal cu 1.

3. Măsurarea distanţei focale a unei lentile convergente se poate face prin metoda Bessel, care presupune aşezarea lentilei între un obiect luminos AB şi un ecran, considerate fixe, aflate la distanţa L unul faţă de celălalt. Se constată că există două poziţii ale lentilei (1 şi 2) pentru care se obţin imagini clare ale obiectului luminos pe ecran, iar cele două poziţii sunt situate la distanţa d una faţă de cealaltă.
Aflaţi distanţa focală f a lentilei, funcţie de L şi d. Se consideră cunoscută formula lentilelor $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$, unde p este distanţa de la obiect la lentilă, iar p' este distanţa de la lentilă la imaginea obiectului (pe ecran).



4. Comisia centrală a concursului naţional de matematică "Adolf Haimovici" este formată din cinci membri. Documentele la care lucrează comisia sunt păstrate într-un seif metalic, încuiat cu lacăte diferite. Fiecare dintre membrii comisiei are cheile unor dintre lacăte, astfel încât seiful să poată fi deschis atunci când se întâlnesc cel puţin trei membri ai comisiei şi să nu poată fi deschis de doi sau mai puţini membri.
a) Care este numărul minim de lacăte ale seifului ?
b) Câte chei trebuie să aibă fiecare membru al comisiei ?
c) Care este modul de împărţire a cheilor către membrii comisiei ?

<u>Notă:</u> *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A XI-A

1. Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $TrA=a+d$, $\det A=ad-bc$.

a) Să se demonstreze că $\det(A-xI_2)=x^2-(TrA)\cdot x+\det A$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Dacă $\det(A-I_2)=2$ şi $\det(A+I_2)=4$, calculaţi $\det A$ şi $\det(A-2I_2)$.

c) Dacă $A^{2014}=O_2$, demonstraţi că $A^2=O_2$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$. Să se calculeze:

a) Limitele laterale în punctul $x_0=0$.

b) Limitele laterale în punctul $x_0=-1$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

3. Un elev scrie un determinat de ordinul al treilea cu elemente numere reale astfel încât pe fiecare linie şi coloană suma elementelor este 1, iar pe diagonala principală toate elementele sunt $\frac{1}{2}$.

a) Care este valoarea minimă pe care o poate lua determinantul ?
b) Care este determinantul de valoare minimă ?

4. Pe o insulă trăiesc 12 cameleoni. La un moment dat trei au culoarea roşie, patru au culoarea galbenă iar ceilalţi cinci au culoarea verde. Dacă se întâlnesc doi cameleoni de două culori diferite, atunci ambii îşi schimbă culoarea în ce-a de-a treia culoare. Altfel ei nu îşi schimbă culoarea. Demonstraţi că:
a) Este posibil ca, la un moment dat, niciun cameleon să nu aibă culoarea verde.
b) Nu este posibil ca, la un moment dat, toţi cameleonii să aibă culoarea verde. (Observaţi că în orice moment doar numărul cameleonilor de o singură culoare este multiplu de 3).

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A XII-A

1. a) Demonstrați că $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ şi $\forall k\in\mathbb{N}^*$ are loc egalitatea
$a^k-b^k=(a-b)\left(a^{k-1}+a^{k-2}b+...+ab^{k-2}+b^{k-1}\right)$.

b) Dacă $f\in\mathbb{Z}[X]$ să se demonstreze că pentru orice $a,b\in\mathbb{Z},a\neq b$, numărul $f(a)-f(b)$ este divizibil cu $a-b$.

c) Argumentați că nu există $g\in\mathbb{Z}[X]$ astfel încât:
$g(2013)=2014;\ g(2014)=2015;\ g(2015)=2013.$

d) Există un polinom $h\in\mathbb{R}[X]$ astfel încât $h(2013)=2013, h(2014)=2014$ şi $h(n)$ este irațional pentru orice n întreg diferit de 2013 şi 2014 ?

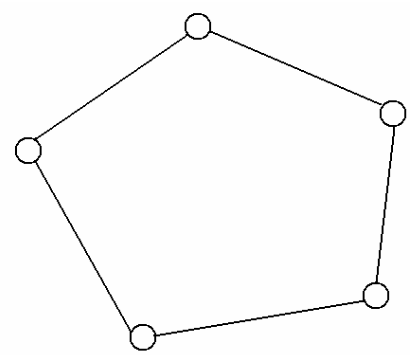
2. Considerăm funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}$ şi $g(x)=e^{-x^2}$.

a) Calculați $f'(0); f''(0); f'''(0); f^{(4)}(0)$.

b) Demonstrați că $f'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ şi $f(x)<0, \forall x<0$.

c) Să se demonstreze că aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției *g*, axa *Ox* şi dreptele de ecuații *x* = 0 şi *x* = 1 este un număr cuprins în intervalul (0,74; 0,75).

3. Avem la dispoziție două culori roşu şi albastru. Notăm cu $\mathcal{H}$ mulțimea tuturor colorărilor posibile (roşu sau albastru) a vârfurilor pentagonului alăturat. La două colorări $\mathcal{C}_1\in\mathcal{H}$ şi $\mathcal{C}_2\in\mathcal{H}$ le asociem colorarea $\mathcal{C}_3\in\mathcal{H}$ astfel:



i) dacă vârfurile corespunzătoare lui $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt de culori diferite, atunci în $\mathcal{C}_3$ vârful va fi colorat cu roşu;

ii) dacă vârfurile corespunzătoare lui $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt de aceiaşi culoare, atunci în $\mathcal{C}_3$ vârful va fi colorat cu albastru;

a) Aflați cardinalul mulțimii $\mathcal{H}$;

b) Aflați elementul neutru pentru legea de compoziție descrisă pe $\mathcal{H}$.

4. Admitem cunoscut rezultatul:
Dacă $\mathcal{P}$ *este o placă omogenă care se identifică cu mulțimea* $\Gamma_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b, 0\leq y\leq f(x)\right\}$, *unde* $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ *este o funcție continuă, atunci centrul de greutate a plăcii* $\mathcal{P}$ *este punctul* $G(x_G,y_G)$ *ale cărui coordonate sunt:*

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

$$x_G = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}; \quad y_G = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx};$$

Să se afle coordonatele centrului de greutate ale plăcii omogene $\mathcal{P}$ definită prin $f:[0,\pi]\to[0,1]$, $f(x)=\sin x$, $\mathcal{P}=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi, 0\le y\le f(x)\}$